정답표와 예상 등급컷

정답표

공통과목

1번 ④ / 2번 ① / 3번 ③ / 4번 ⑤ / 5번 ②

6번 ④ / 7번 ① / 8번 ③ / 9번 ⑤ / 10번 ②

11번 ④ / 12번 ① / 13번 ③ / 14번 ⑤ / 15번 ②

16번 4 / 17번 8 / 18번 57 / 19번 35 / 20번 354

21번 38 / 22번 49

확률과 통계

23번 ③ / 24번 ① / 25번 ④ / 26번 ② / 27번 ⑤

28번 ③ / 29번 64 / 30번 43

미적분

23번 ③ / 24번 ⑤ / 25번 ③ / 26번 ① / 27번 ②

28번 ② / 29번 73 / 30번 9

기하

23번 ③ / 24번 ⑤ / 25번 ② / 26번 ③ / 27번 ③

28번 ④ / 29번 29 / 30번 928

예상 등급컷

공통과목과 선택과목을 합한 100점 만점 원점수 기준입니다.

선택과목	1등급	2등급	3등급
확률과 통계	86점	80점	72점
미적분	86점	78점	70점
기하	86점	80점	72점

위 점수는 문항 구성과 예상 풀이 부담을 바탕으로 정한 제작자 예상치입니다. 실제 응시 결과에 따라 달라질 수 있습니다.

공통과목 해설

1번 | 정답 ④ | 2점

R1. 같은 수를 계산하기 쉬운 형태로 바꾼다

조건

$\log_2 12 + \log_2 \frac{2}{3}$의 값은?

사용 과정

양수의 로그의 합을 곱의 로그로 쓰면 $\log_2 (12 \times 2/3) = \log_2 8 = 3$이다.

결과 · 다음 연결

구하는 값은 3이다.

2번 | 정답 ① | 2점

R1. 도함수에 주어진 값을 대입한다

조건

$x = -1$에서의 미분계수를 구한다.

사용 과정

$f'(x) = 6x^2 - 2x$이므로 $f'(-1) = 8$이다.

결과 · 다음 연결

미분계수는 8이다.

공통과목 3번 해설

3번 | 정답 ③ | 3점

R1. 같은 간격의 항과 합을 연결한다

조건

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3=4$, $a_7=16$일 때, a_{10}의 값은?

사용 과정

공차를 d라 두면 $4d=16-4=12$이므로 $d=3$이다. $a_{10}=a_7+3d=25$이다.

결과 · 다음 연결

요구한 값은 25이다.

4번 | 정답 ⑤ | 3점

R1. 빈 점의 함수값을 극한과 맞춘다

조건

$x=2$에서 연속이다.

사용 과정

분자는 $(x-(2))(x+(5))$로 인수분해된다. $x\neq 2$에서 약분한 뒤 극한을 취하면 7이다.

결과 · 다음 연결

연속 조건에서 $a=7$이다.

공통과목 5번 해설

5번 | 정답 ② | 3점

R1. 범위에서 부호를 정한다

조건

$0<\theta<\pi/2$이고 $\tan\theta=2$일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값은?

사용 과정

$\sin\theta=2\cos\theta$를 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 넣으면 $5\cos^2\theta=1$이다. 따라서 $\sin\theta\cos\theta=2\cos^2\theta=2/5$이다.

결과 · 다음 연결

구하는 값은 $\frac{2}{5}$이다.

6번 | 정답 ④ | 3점

R1. 미분계수와 함수값으로 계수를 결정한다

조건

함수 $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$가 $f'(2)=3$, $f(0)=-1$를 만족시킨다. $f(2)$의 값은?

사용 과정

$f'(x)=3x^2-6x+a$이므로 $a=3$이다. $f(0)=b$에서 상수항은 -1이다.

결과 · 다음 연결

$f(2)=8-12+2\times(3)+(-1)=1$이다.

공통과목 7번 해설

7번 | 정답 ① | 3점

R1. 적분의 대칭 또는 구간을 결합한다

조건

연속함수 $f(x)$가 $f(-x)=f(x)$를 만족시킨다. $\int_0^3 f(x)\,dx=5$일 때, $\int_{-3}^{3}\{2f(x)-x\}\,dx$의 값은?

사용 과정

짝함수의 대칭 적분은 양의 구간의 두 배이므로 $\int_{-3}^{3} f = 10$이다. x의 대칭 적분은0이므로 목표는 $2\times 10=20$이다.

결과 · 다음 연결

정적분 값은 20이다.

8번 | 정답 ③ | 3점

R1. 같은 비율을 항 또는 합 사이에 적용한다

조건

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=6$, $a_5=48$일 때, a_1+a_3의 값은?

사용 과정

공비를 r라 하면 $r^3=a_5/a_2=8$이므로 $r=2$이다. 따라서 $a_1=3$, $a_3=12$이다.

결과 · 다음 연결

요구한 값은 15이다.

공통과목 9번 해설

9번 | 정답 ⑤ | 4점

R1. 외부점을 지나는 조건으로 접점을 정한다

조건

접점의 x좌표를 t라 두면 접선은 $y=2tx-t^2$이다.

사용 과정

점 $(1,-3)$을 대입하면 $t^2-2t-3=0$이므로 $t=-1,3$이다.

결과 · 다음 연결

두 접선은 $y=-2x-1$, $y=6x-9$이다.

R2. 두 절편의 곱으로 넓이를 계산한다

조건

축과의 절편은 부호가 있을 수 있으므로 넓이에는 절댓값을 쓴다.

사용 과정

첫 직선의 절편은 $-1/2$, -1이어서 넓이 $1/4$이다. 두 번째 직선의 절편은 $3/2$, -9이어서 넓이 $27/4$이다.

결과 · 다음 연결

합은 $1/4+27/4=7$이다.

공통과목 10번 해설

10번 | 정답 ② | 4점

R1. 밑을 통일하여 교점 방정식을 만든다

조건

정의역은 $x>8/3$이다.

사용 과정

$2\log_2 x=\log_2(12x-32)$에서 $x^2=12x-32$이다. $(x-4)(x-8)=0$이므로 두 후보$4,8$은 모두 정의역 안에 있다.

결과 · 다음 연결

교점은 $(4,2)$, $(8,3)$이다.

R2. 두 교점의 좌표를 넓이에 연결한다

조건

원점과 두 점이 삼각형을 만든다.

사용 과정

넓이는 $|4\times3-8\times2|/2=2$이다.

결과 · 다음 연결

정답은2이다.

공통과목 11번 해설

11번 | 정답 ④ | 4점

R1. 각의 사인으로 전체 넓이를 구한다

조건

삼각형의 내각은0과 π 사이이므로 사인은 양수이다.

사용 과정

$\sin\angle\mathrm{BAC}=3/5$이다. 전체 넓이는 $6\times10\times(3/5)/2=18$이다.

결과 · 다음 연결

이제 이등분선으로 나뉜 넓이의 비를 구한다.

R2. 같은 각과 공통 변으로 넓이비를 정한다

조건

$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{DAC}$이고 AD는 공통이다.

사용 과정

두 삼각형의 넓이는 $\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=3:5$의 비이다. 그러므로 ABD의 넓이는 전체의 3/8이다.

결과 · 다음 연결

$18\times3/8=27/4$이다.

12번 | 정답 ① | 4점

R1. 대칭인 구간의 두 적분이 같음을 이용한다

조건

0에서2까지의 구간은 $x\mapsto2-x$로 자기 자신에 대응한다.

사용 과정

$\int_0^2 f(2-x)dx=\int_0^2 f(x)dx$이다. 주어진 항등식을 적분하면 $2\int_0^2 f=\int_0^2(x^2-2x+6)dx=32/3$이다.

결과 · 다음 연결

목표는 이 적분의3배이므로16이다.

공통과목 13번 해설

13번 | 정답 ③ | 4점

R1. 공통 교점을 분리한다

조건

원점은 모든 k에 대해 교점이다.

사용 과정

$f(x)=kx$를 정리하면 $x\{(x-3)^2-k\}=0$이다. 원점 이외의 두 해는 $3-\sqrt{k}$, $3+\sqrt{k}$이다.

결과 · 다음 연결

서로 다른 두 해가 있으려면 $k>0$이다.

R2. 양수와 제외점을 동시에 확인한다

조건

작은 해도 양수이고 원점과 달라야 한다.

사용 과정

$3-\sqrt{k}>0$에서 $k<9$이다. $k=9$에서는 한 해가 원점이므로 제외된다.

결과 · 다음 연결

$k=1,\ldots,8$의 8개이다.

공통과목 14번 해설

14번 | 정답 ⑤ | 4점

R1. 넓이비를 두 각의 사인비로 옮긴다

조건

$\angle \mathrm{DAC}=\theta$라 두면 $0<\theta<\pi/3$이다.

사용 과정

두 변의 길이가1이고 끼인각이 2θ인 이등변삼각형에 수선을 내리면 밑변은 $2\sin\theta$, 높이는 $\cos\theta$이다. 넓이를 두 방식으로 계산하여 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$를 얻는다. 같은 삼각형에 코사인법칙을 쓰면 $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$도 얻는다. 이 문제 안의 삼각형 관계로 필요한 식을 만들었다.

높이가 같은 두 삼각형에서 넓이비는 $\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=3:4$이다. 다른 한편 $[\mathrm{ABD}]/[\mathrm{ACD}]=(4\sin 2\theta)/(8\sin\theta)=\cos\theta$이므로 $\cos\theta=3/4$이다.

결과 · 다음 연결

$\cos 2\theta=2(3/4)^2-1=1/8$이다.

R2. 양쪽 삼각형에 같은 미지 길이를 사용한다

조건

$\mathrm{AD}=d$, $\mathrm{BD}=3u$, $\mathrm{DC}=4u$라 놓는다.

사용 과정

코사인법칙에서 $9u^2=16+d^2-d$, $16u^2=64+d^2-12d$이다. 첫 식의16배와 두 번째 식의9배를 빼면 $7d^2+92d-320=0$이다.

결과 · 다음 연결

$(7d-20)(d+16)=0$이며 길이는 양수이므로 $d=20/7$이다.

공통과목 15번 해설

15번 | 정답 ② | 4점

R1. 미분가능 여부로 근의 중복을 구별한다

조건

삼차식의 서로 다른 두 실근 중 하나는 단순근, 하나는 이중근이다.

사용 과정

단순근에서는 부호가 바뀌고 절댓값 그래프가 꺾이므로 단순근은2이다. 나머지 근을 a라 두면 $f(x)=(x-2)(x-a)^2$이다.

결과 · 다음 연결

$f(0)=-2a^2=-18$이므로 $a=3$ 또는 -3이다.

R2. 도함수 부호로 남은 후보를 고른다

조건

$f'(0)=a^2+4a$이다.

사용 과정

$a=3$이면21, $a=-3$이면-3이므로 양수 조건은 $a=3$을 선택한다.

결과 · 다음 연결

$f(x)=x^3-8x^2+21x-18$이다.

R3. 부호가 바뀌는 근만 적분 구간을 나누는 기준으로 쓴다

조건

$(x-3)^2$은 음수가 아니므로 f의 부호는 $x-2$의 부호와 같다.

사용 과정

따라서 적분은 $-\int_0^2 f+\int_2^4 f$이다. $x=3$에서는 부호가 바뀌지 않으므로 다시 부호를 뒤집지 않는다.

결과 · 다음 연결

원시함수 $x^4/4-8x^3/3+21x^2/2-18x$의 값을 대입하면 12이다.

공통과목 16번 해설

16번 | 정답 4 | 3점

R1. 로그식을 지수식으로 바꾼다

조건

양수 a, b에 대하여 $\log_2 a = 3$, $\log_a b = \frac{2}{3}$일 때, b의 값을 구하시오.

사용 과정

$a = 2^3$이고 $b = a^{\frac{2}{3}} = 2^2$이다.

결과 · 다음 연결

따라서 $b = 4$이다.

17번 | 정답 8 | 3점

R1. 원시함수의 양 끝값을 뺀다

조건

$\int_0^2 (2x^3 - 3x^2 + 4)\,dx$의 값을 구하시오.

사용 과정

한 원시함수는 $\mathrm{F}(x) = \frac{x^4}{2} - x^3 + 4x$이다. $\mathrm{F}(2) - \mathrm{F}(0)$을 계산한다.

결과 · 다음 연결

정적분 값은 8이다.

공통과목 18번 해설

18번 | 정답 57 | 3점

R1. 속도의 부호가 바뀌는 시각을 찾는다

조건

0부터5 사이의 속도 영점은$0, 2, 4$이다.

사용 과정

속도는 $(0, 2)$에서 양수, $(2, 4)$에서 음수, $(4, 5)$에서 양수이다.

결과 · 다음 연결

이동 거리는 $\int_0^2 v - \int_2^4 v + \int_4^5 v$이다.

R2. 각 구간의 변위를 거리로 바꿔 합한다

조건

한 원시함수는 $\mathrm{V}(t) = t^4/4 - 2t^3 + 4t^2$이다.

사용 과정

$\mathrm{V}(0) = 0$, $\mathrm{V}(2) = 4$, $\mathrm{V}(4) = 0$, $\mathrm{V}(5) = 25/4$이다. 따라서 거리는 $4 + 4 + 25/4 = 57/4$이다.

결과 · 다음 연결

$4\mathrm{L} = 57$이다.

공통과목 19번 해설

19번 | 정답 35 | 3점

R1. 유한한 극한에서 근과 기울기를 얻는다

조건

최고차항의 계수가1인 이차함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x-(-1)}=2$을 만족시킨다.

사용 과정

분모가0으로 가므로 $f(-1)=0$이다. $f(x)=(x-(-1))(x+b)$라 두면 극한은 $-1+b=2$이어서 $b=3$이다.

결과 · 다음 연결

$f(4)=(4-(-1))(4+(3))=35$이다.

20번 | 정답 354 | 4점

R1. 제시된 보조수열의 관계를 확인한다

조건

$b_n=a_n-n^2$이고 원래 점화식의 우변은 $n^2+(n+1)^2$이다.

사용 과정

$b_{n+1}+b_n=a_{n+1}+a_n-\{(n+1)^2+n^2\}=0$이다. 따라서 $b_n=(-1)^{n-1}c$이고 $a_n=n^2+(-1)^{n-1}c$이다.

결과 · 다음 연결

교대합에서 제곱항의 합과 c의 합을 분리할 수 있다.

공통과목 20번 해설

R2. 교대합에서 미정 상수를 결정한다

조건

$(-1)^{n-1}a_n = (-1)^{n-1}n^2 + c$이다.

사용 과정

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + 9^2 - 10^2 = \sum_{k=1}^{5}(1-4k) = 5 - 4\ \cdot\ 15 = -55$이다. 따라서 $-55 + 10c = 15$에서 $c = 7$이다.

결과 · 다음 연결

$p = -55,\ q = 7$이다.

R3. 홀수 개 항의 합에서는 교대항이 하나 남는다

조건

$a_n = n^2 + 7(-1)^{n-1}$이다.

사용 과정

$\sum_{n=1}^{9} n^2 = 9\ \cdot\ 10\ \cdot\ 19/6 = 285$이고 $\sum_{n=1}^{9}(-1)^{n-1} = 1$이므로 $r = 285 + 7 = 292$이다.

결과 · 다음 연결

$q + r - p = 7 + 292 - (-55) = 354$이다.

공통과목 21번 해설

21번 | 정답 38 | 4점

R1. 역산한 값이 어느 조건에 속하는지 검사한다

조건

$a_{n+1}=b$에서 앞 항을 찾는다.

사용 과정

큰 쪽의 후보는 $b+3$이다. 작은 쪽의 후보는 $(b-1)/2$이며$0,1,2$ 중 하나일 때만 채택한다. 중간 항은0일 수 있지만 첫 번째항은 자연수라는 차이를 유지한다.

결과 · 다음 연결

역방향에서 합쳐진 같은 값은 한 번만 남긴다.

R2. 마지막 항에서 다섯 번 역추적한다

조건

$a_6=1$이다.

사용 과정

a_5의 후보: $0,\ 4$.

a_4의 후보: $3,\ 7$.

a_3의 후보: $1,\ 6,\ 10$.

a_2의 후보: $0,\ 4,\ 9,\ 13$.

a_1의 후보: $3,\ 7,\ 12,\ 16$.

결과 · 다음 연결

첫 번째항 범위에 맞는 값은 $3,\ 7,\ 12,\ 16$이며 합은 38이다.

공통과목 22번 해설

22번 | 정답 49 | 4점

R1. 반사된 점이 같은 직선 위의 유일한 점임을 확인한다

조건

$\mathrm{A}=(p,q)$라 두면 $p,q>0$, $a^{q}=p$이다.

사용 과정

$\mathrm{C}=(q,p)$는 $y=a^{x}$ 위에 있고 $x+y=p+q$를 만족한다. $a>1$일 때 $x+a^{x}$는 엄격히 증가하므로 이 직선과 지수곡선은 한 번만 만난다. 따라서 $\mathrm{B}=\mathrm{C}$이다.

결과 · 다음 연결

좌우 조건에서 $p>q$이고 $\mathrm{B}=(q,p)$이다.

R2. 길이와 넓이를 합·차로 변환한다

조건

$\mathrm{AB}=\sqrt{2}\,(p-q)=2\sqrt{2}$이다.

사용 과정

$p-q=2$이며 넓이는 $(p^{2}-q^{2})/2=12$이므로 $(p-q)(p+q)=24$, $p+q=12$이다.

결과 · 다음 연결

$p=7$, $q=5$이다.

R3. 좌표를 지수관계에 다시 넣는다

조건

$a^{q}=p$이다.

사용 과정

$a^{5}=7$이므로 $a^{10}=49$이다. 이 값은 $a>1$이며 두 점 $(7,5),(5,7)$은 모든 조건을 만족한다.

결과 · 다음 연결

정답은49이다.

확률과 통계 해설

확률과 통계 해설

23번 | 정답 ③ | 2점

R1. 목표 차수를 만드는 인수를 고른다

조건

7개의 인수 중 5개에서 x를 고른다.

사용 과정

계수는 ${}_7\mathrm{C}_5\,1^2 = 21$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 21이다.

24번 | 정답 ① | 3점

R1. 독립관계를 여사건에 적용한다

조건

A와 B가 독립이면 A^c와 B도 독립이다.

사용 과정

$\mathrm{P}(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{B}) = (1-\mathrm{P}(\mathrm{A}))\mathrm{P}(\mathrm{B}) = (1-\frac{1}{3})\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 $\frac{1}{2}$이다.

확률과 통계 25번 해설

25번 | 정답 ④ | 3점

R1. 표본평균의 분산으로 경계를 표준화한다

조건

모표준편차는4, 표본 크기는16이다.

사용 과정

표본평균의 표준편차는 $4/\sqrt{16}=1$이다. 따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(-1\le \mathrm{Z}\le 2)$이다.

결과 · 다음 연결

양쪽 구간을 합하면 $0.3413+0.4772=0.8185$이다.

26번 | 정답 ② | 3점

R1. 옮기는 색에 따라 관찰 확률을 나눈다

조건

흰 공을 옮길 확률은$2/3$, 검은 공을 옮길 확률은$1/3$이다.

사용 과정

흰 공을 옮겼다면 두 번째 흰 공 확률은$2/5$, 검은 공을 옮겼다면$1/5$이다. 따라서 흰 공 관찰 확률은 $(2/3)(2/5)+(1/3)(1/5)=1/3$이다.

결과 · 다음 연결

검은 공을 옮기고 흰 공을 관찰한 확률은$1/15$이다.

확률과 통계 26번 해설

R2. 관찰한 결과를 조건부 표본공간으로 쓴다

조건

주어진 관찰에 속하는 경로들만 비교한다.

사용 과정

구하는 확률은 $(1/15)/(1/3) = 1/5$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 $1/5$이다.

27번 | 정답 ⑤ | 3점

R1. 두 확률의 같음을 성공확률의 식으로 쓴다

조건

두 확률은 $(1-p)^4$, $4p(1-p)^3$이다.

사용 과정

$1-p>0$이므로 $(1-p)^3$으로 나누면 $1-p=4p$이다. 따라서 $p=1/5$이다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 4/5$이다.

R2. 평균의 일차변환을 계산한다

조건

상수항은 평균에도 그대로 더한다.

사용 과정

$\mathrm{E}(5\mathrm{X}+2) = 5(4/5)+2 = 6$이다.

결과 · 다음 연결

정답은6이다.

확률과 통계 28번 해설

28번 | 정답 ③ | 4점

R1. 비감소 조건을 값의 개수로 바꾼다

조건

나오는 값의 횟수를 정하면 함수값의 순서도 하나로 정해진다.

사용 과정

1과5는 반드시 나타나므로, 빠지는 값은2,3,4 중 하나이다. 나타나는 네 값을 한 번씩 놓고 나면 추가할 값은5개이다.

결과 · 다음 연결

빠지는 값에 따라 남은 합을 나누어 센다.

R2. 남은 다섯 값의 합을 빠짐없이 센다

조건

추가값도 비감소 순으로 쓰면 중복 없이 센다.

사용 과정

빠지는 값이2이면 네 값을 한 번씩 먼저 놓고 남은5개의 합을 14로 만든다. 가능한 추가 묶음은 (1,1,3,4,5), (1,1,4,4,4), (1,3,3,3,4)의3개이다.

빠지는 값이3이면 네 값을 한 번씩 먼저 놓고 남은5개의 합을 15로 만든다. 가능한 추가 묶음은 (1,1,4,4,5), (1,2,2,5,5), (1,2,4,4,4), (2,2,2,4,5)의4개이다.

빠지는 값이4이면 네 값을 한 번씩 먼저 놓고 남은5개의 합을 16로 만든다. 가능한 추가 묶음은 (1,2,3,5,5), (2,2,2,5,5), (2,3,3,3,5)의3개이다.

결과 · 다음 연결

세 경우의 수를 더하면 10개이다.

확률과 통계 29번 해설

29번 | 정답 64 | 4점

R1. 두 표본평균의 분산으로 모표준편차를 구한다

조건

$\sigma^2/n = 4$이고 $\sigma^2/(n+20) = 16/9$이다.

사용 과정

$4n = (16/9)(n+20)$을 풀면 $n = 16$, $\sigma = 8$이다.

결과 · 다음 연결

새 표본평균의 표준편차는 $8/\sqrt{\mathrm{N}}$이고 신뢰구간의 반폭은 $h = 16/\sqrt{\mathrm{N}}$이다.

R2. 두 점의 포함 여부를 표본평균의 범위로 바꾼다

조건

$m \in \mathrm{I}$이면 $m - h \le \overline{\mathrm{X}} \le m + h$이다.

사용 과정

이 범위 안에서는 $m + 3 > \overline{\mathrm{X}} + h$일 때만 $m + 3 \notin \mathrm{I}$가 된다. 따라서 요구한 사건은 $m - h \le \overline{\mathrm{X}} < \min(m + h, m + 3 - h)$이다. $\mathrm{Z} = (\overline{\mathrm{X}} - m)/(8/\sqrt{\mathrm{N}})$로 표준화하면 $-2 \le \mathrm{Z} < \min(2, 3\sqrt{\mathrm{N}}/8 - 2)$이다.

결과 · 다음 연결

상한이 2 이상이면 확률은 0.9544이므로 주어진 0.8185를 만족할 수 없다.

R3. 표의 확률에 맞는 상한을 찾는다

조건

$\mathrm{P}(-2 \le \mathrm{Z} \le 1) = 0.4772 + 0.3413 = 0.8185$이고 표준정규분포의 누적확률은 엄격히 증가한다.

사용 과정

$3\sqrt{\mathrm{N}}/8 - 2 = 1$이므로 $\sqrt{\mathrm{N}} = 8$이다. 이 값에서 상한 $1 < 2$도 성립한다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{N} = 64$이다. 연속분포이므로 끝점 포함 여부는 확률값에 영향을 주지 않는다.

확률과 통계 30번 해설

30번 | 정답 43 | 4점

R1. 최솟값별로 조건부 표본공간을 센다

조건

최솟값을 m이라 하면 최댓값은 $2m$이고 $m=1,2,3,4$이다.

사용 과정

m부터 $2m$까지의 수로 만든 길이5의 기록 중 양 끝값을 모두 쓰는 수는 $(m+1)^5-2m^5+(m-1)^5$이다.

결과 · 다음 연결

$m=1,2,3,4$에서 각각$30,180,570,1320$이므로 분모는2100이다.

R2. 세 값의 출현 횟수와 합의 짝홀을 연결한다

조건

세 값은 $m,k,2m$이고 $m<k<2m$이다.

사용 과정

횟수의 모양은 $(3,1,1)$ 또는 $(2,2,1)$이다. 전자는 기본 합 $3m+k$가 짝수일 때만 가능하고 세 번 나오는 값의 선택3가지와 순서20가지를 곱하여60가지이다.

결과 · 다음 연결

후자는 한 번 나오는 값이 짝수여야 한다. 그 값 하나를 정할 때 순서가 $5!/(2!\,2!\,)=30$가지이다.

R3. 내부값별로 합하여 조건부확률을 계산한다

조건

세 값 중 짝수인 값의 수를 유지한다.

사용 과정

$m=2,k=3$은60가지이다. $m=3$은 $k=4,5$에서$60,90$가지이다. $m=4$는 $k=5,6,7$에서$60,150,60$가지이다.

결과 · 다음 연결

분자는480이다. $480/2100=8/35$이므로 $p+q=43$이다.

미적분 해설

미적분 해설

23번 | 정답 ③ | 2점

R1. 알려진 극한 형태로 바꾼다

조건

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^n}{3^n-2^{n+1}}$의 값은?

사용 과정

분자와 분모를 3^n으로 나누면 $(3+(2/3)^n)/(1-2(2/3)^n)$이다.

결과 · 다음 연결

극한은 3이다.

24번 | 정답 ⑤ | 3점

R1. 몫의 미분법으로 기울기를 구한다

조건

$x=0$에서 분모 $x+1$은 0이 아니다.

사용 과정

$f'(x)=\{2e^{2x}(x+1)-e^{2x}\}/(x+1)^2=e^{2x}(2x+1)/(x+1)^2$이다.

결과 · 다음 연결

$f'(0)=1$이다.

미적분 25번 해설

25번 | 정답 ③ | 3점

R1. 안쪽 식을 변수로 정한다

조건

$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$의 값은?

사용 과정

$u=\ln x$로 놓으면 경계는$0, 1$이고 적분은 $\int_0^1 u\,du = 1/2$이다.

결과 · 다음 연결

적분값은 $\frac{1}{2}$이다.

26번 | 정답 ① | 3점

R1. 부분분수로 소거되는 부분합을 만든다

조건

$1/[n(n+2)] = \frac{1}{2}(1/n - 1/(n+2))$이다.

사용 과정

첫 N항의 합은 $\frac{1}{2}\{1 + 1/2 - 1/(\mathrm{N}+1) - 1/(\mathrm{N}+2)\}$이다. N을 무한히 크게 하면 뒤의 두 항은 0으로 간다.

결과 · 다음 연결

급수의 합은 $3/4$이다.

미적분 27번 해설

27번 | 정답 ② | 3점

R1. 주어진 변화율을 목표 변수의 변화율로 바꾼다

조건

매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=t^2+t$, $y=t^3-3t$에서 $t=1$일 때 d^2y/dx^2의 값은?

사용 과정

$dy/dx=(3t^2-3)/(2t+1)$이다. 이 식을 t로 미분한 뒤 $dx/dt=2t+1$로 다시 나눈다. $t=1$에서 $(6/3)/3=2/3$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 $\frac{2}{3}$이다.

28번 | 정답 ② | 4점

R1. 길이 적분의 제곱근을 정리한다

조건

$f'(x)=(x-1/x)/2$이고 적분 구간에서 $x>0$이다.

사용 과정

$1+\{f'(x)\}^2=(x+1/x)^2/4$이므로 $\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}=(x+1/x)/2$이다. 따라서 $\mathrm{L}=\int_a^{2a}(x+1/x)/2\,dx=3a^2/4+(\ln 2)/2$이다.

결과 · 다음 연결

곡선의 길이를 a^2와 $\ln 2$의 식으로 얻었다.

미적분 28번 해설

R2. 세로 변화량과 곡선 길이를 연결한다

조건

$f(2a)-f(a)=3a^2/4-(\ln 2)/2$이다.

사용 과정

주어진 관계에 대입하면 $3a^2/4+(\ln 2)/2=3a^2/2-\ln 2$이므로 $a^2=2\ln 2$이다. $\ln 2=\int_1^2 1/x\,dx>1/2$이므로 이 값은 $a>1$과 맞는다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{L}=2\ln 2$이고 $\mathrm{L}/\ln 2=2$이다.

29번 | 정답 73 | 4점

R1. 역수를 취하여 수열의 감소와 극한을 확인한다

조건

$1/a_{n+1}=1/a_n+1$이다.

사용 과정

$1/a_n=1/a_1+n-1$이므로 $a_n\to 0$이다. 점화식에서 $a_n-a_{n+1}=a_na_{n+1}$이므로 첫 급수의 합은 a_1이다.

결과 · 다음 연결

$a_1=3/2,\ a_2=3/5,\ a_3=3/8$이다.

R2. 목표의 세 칸 간격에 맞는 차를 만든다

조건

$1/a_{n+3}-1/a_n=3$이다.

사용 과정

양변에 a_na_{n+3}을 곱하면 $a_n-a_{n+3}=3a_na_{n+3}$이다. 부분합에서는 첫 세 항과 마지막 세 항만 남는다.

결과 · 다음 연결

급수의 합은 $(a_1+a_2+a_3)/3=(3/2+3/5+3/8)/3=33/40$이다.

미적분 29번 해설

R3. 서로소 여부를 확인한다

조건

분자33과 분모40은 서로소이다.

사용 과정

$p+q=40+33=73$이다.

결과 · 다음 연결

정답은73이다.

30번 | 정답 9 | 4점

R1. 함수값이 지나가는 구간과 방향을 정한다

조건

$f'(x)=e^{x}x(x-1)$이다.

사용 과정

$[-1,0]$에서는 $7/e$에서3으로 증가하고, $[0,1]$에서는3에서 e로 감소하며, $[1,\alpha]$에서는 e에서3으로 증가한다. f는1보다 큰 구간에서 엄격히 증가하므로 α는 하나이다.

결과 · 다음 연결

세 구간을 각각 $u=f(x)$로 바꾸면 감소 구간의 방향이 $|f'|$ 때문에 뒤집힌다.

R2. 같은 함수값을 지나는 횟수를 적분에 반영한다

조건

$\mathrm{L}=7/e$라 두면 $\mathrm{L}<e<3$이다.

사용 과정

$\mathrm{F}(t)=\int_{\mathrm{L}}^{3}|u-t|\,du+2\int_{e}^{3}|u-t|\,du$이다. $t\le \mathrm{L}$에서는 감소하고 $t\ge 3$에서는 증가하므로 최소점은 두 끝 사이에 있다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{L}\le t\le e$에서 도함수는 $2t-\mathrm{L}+2e-9$이며 $t=e$에서도 음수이다. 이는 $e<2.8$, $\mathrm{L}>2.5$에서 $4e-\mathrm{L}-9<0$이기 때문이다.

미적분 30번 해설

R3. 최소점이 속하는 구간의 두 식을 함께 미분한다

조건

$e \le t \le 3$에서는 두 적분 모두 $u = t$에서 부호가 바뀐다.

사용 과정

각 적분을 양쪽으로 나누어 계산하면 $\mathrm{F}'(t) = (2t - \mathrm{L} - 3) + 2(2t - e - 3) = 6t - \mathrm{L} - 2e - 9$이다. 이 값은 e에서 음수, 3에서 양수이며 엄격히 증가한다.

결과 · 다음 연결

유일한 최소점은 $a = (9 + \mathrm{L} + 2e)/6$이다.

R4. 묻는 조합만 계산한다

조건

알아낸 값은 전체 적분의 최소점이다.

사용 과정

$6a - 2e - 7/e = 9$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 9이다.

기하 해설

23번 | 정답 ③ | 2점

R1. 표준형에서 초점 관계를 읽는다

조건

쌍곡선 $x^2/9 - y^2/16 = 1$의 두 초점 사이의 거리는?

사용 과정

초점거리의 절반을 c라 하면 $c^2 = 9 + 16 = 25$이다. 두 초점 사이 거리는 $2c = 10$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 10이다.

24번 | 정답 ⑤ | 3점

R1. 벡터의 크기를 성분 또는 내적으로 계산한다

조건

두 벡터 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (3, -1)$에 대하여 $|2\vec{a} - \vec{b}|$의 값은?

사용 과정

$2\vec{a} - \vec{b} = (-1, 5)$이므로 크기는 $\sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 $\sqrt{26}$이다.

기하 25번 해설

25번 | 정답 ② | 3점

R1. 수직인 거리 관계를 사용한다

조건

중심이 $(1, 2, 3)$이고 반지름이 5인 구와 xy평면이 만나서 생기는 원의 반지름은?

사용 과정

구의 중심에서 xy평면까지 거리는 3이다. 단면의 반지름 r은 $r^2 + 3^2 = 5^2$를 만족하므로 4이다.

결과 · 다음 연결

정답은 4이다.

26번 | 정답 ③ | 3점

R1. 접하는 조건을 직선의 정보로 바꾼다

조건

타원 $x^2/16 + y^2/9 = 1$ 위의 점 $(2, 3\sqrt{3}/2)$에서의 접선이 두 좌표축과 만드는 삼각형의 넓이는?

사용 과정

접선은 $x/8 + \sqrt{3}y/6 = 1$이다. 두 절편이 8과 $2\sqrt{3}$이므로 넓이는 $8\sqrt{3}$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 $8\sqrt{3}$이다.

기하 27번 해설

27번 | 정답 ③ | 3점

R1. 공간 관계 또는 내적식을 거리·넓이 관계로 바꾼다

조건

삼각형의 넓이가18이고, 이 삼각형을 평면 α에 정사영한 도형의 넓이가12이다. 삼각형이 포함된 평면과 α가 이루는 예각을 θ라 할 때, $\sin\theta$의 값은?

사용 과정

정사영 넓이는 원래 넓이의 $\cos\theta$배이므로 $\cos\theta = 2/3$이다. 예각 조건에서 $\sin\theta = \sqrt{5}/3$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 $\frac{\sqrt{5}}{3}$이다.

28번 | 정답 ④ | 4점

R1. 초점 거리의 차와 두 배 각을 연결한다

조건

$\mathrm{PF_2} = t$라 하면 오른쪽 가지의 정의로 $\mathrm{PF_1} = t + 4$이다. $\theta = \angle \mathrm{PF_1F_2}$라 하면 다른 밑각은 2θ이다.

사용 과정

사인법칙에서 $(t+4)/t = \sin 2\theta/\sin\theta = 2\cos\theta$이다. 코사인법칙으로
$\cos\theta = ((t+4)^2 + 100 - t^2)/(20(t+4))$이다.

결과 · 다음 연결

두 식을 합치면 $(t-8)(t-10) = 0$이다.

기하 28번 해설

R2. 사인 관계의 후보를 원래 각으로 확인한다

조건

사인값이 같아도 각 자체가 같다고 바로 결론낼 수 없다.

사용 과정

$t=8$이면 $\cos\theta=3/4$이고 다른 밑각의 코사인은 $(8^2+10^2-12^2)/(2\cdot 8\cdot 10)=1/8=\cos 2\theta$여서 성립한다. $t=10$이면 $\cos\theta=7/10$이지만 다른 밑각의 코사인은 $1/50$, $\cos 2\theta=-1/50$이므로 원조건에 맞지 않는다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{PF}_2=8$, $\mathrm{PF}_1=12$이다.

R3. 확정한 길이와 각으로 넓이를 구한다

조건

$\sin\theta=\sqrt{7}/4$이다.

사용 과정

넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12\cdot \sqrt{7}/4=15\sqrt{7}$이다. 이때 $\mathrm{P}=(4,3\sqrt{7})$이므로 제1사분면과 쌍곡선의 식도 만족한다.

결과 · 다음 연결

정답은 $15\sqrt{7}$이다.

기하 29번 해설

29번 | 정답 29 | 4점

R1. 접점 좌표를 단위원 위의 양으로 바꾼다

조건

$\mathrm{P}=(3u,2v)$라 두면 $u,v>0$, $u^2+v^2=1$이다.

사용 과정

접선에서 $\mathrm{A}=(3/u,0)$, $\mathrm{B}=(0,2/v)$이므로 $\mathrm{M}=(3/(2u),1/v)$이다.

결과 · 다음 연결

$4\mathrm{OM}^2=9/u^2+4/v^2$이다.

R2. 제곱의 합으로 하한과 등호를 함께 확인한다

조건

$u^2+v^2=1$이다.

사용 과정

$(9/u^2+4/v^2)(u^2+v^2)-(3+2)^2=(3v/u-2u/v)^2\ge 0$이다.

결과 · 다음 연결

따라서 $\mathrm{OM}^2\ge 25/4$이다. $u^2=3/5$, $v^2=2/5$일 때 등호가 성립한다.

R3. 가능한 접점에서 최소가 달성됨을 확인한다

조건

등호의 두 값은 양수이며 합이 1이다.

사용 과정

실제 제1사분면의 타원 위 점이므로 최솟값은 $25/4$이다.

결과 · 다음 연결

$p+q=29$이다.

기하 30번 해설

30번 | 정답 928 | 4점

R1. 밑변에 수직인 평면에서 높이를 읽는다

조건

AB는 x축과 평행하고 길이는8이다.

사용 과정

P에서 직선 AB까지의 거리의 제곱은 $y^2+(z-3)^2$이다. 따라서 넓이의 제곱은 $16\{y^2+(z-3)^2\}$이다.

결과 · 다음 연결

구의 조건과 부호 제한을 이용해 중괄호를 최대로 만든다.

R2. 수평 좌표를 제거하되 달성 조건을 유지한다

조건

$x^2+y^2+z^2=25,\ y\ge 3$이다.

사용 과정

$y^2+(z-3)^2=34-x^2-6z$이다. $y\ge 3$에서 $x^2+z^2\le 16$이므로 $z\ge -\sqrt{16-x^2}$. 따라서 중괄호는 $34-x^2+6\sqrt{16-x^2}$ 이하이다.

결과 · 다음 연결

$u=\sqrt{16-x^2}$라 두면 $0\le u\le 4$이고 상한은 $18+u^2+6u$이다.

R3. 상한의 최댓값과 실재점을 확인한다

조건

상한은 u가 커질수록 증가한다.

사용 과정

$u=4$에서58이고 이는 $x=0,\ z=-4,\ y=3$에서 달성된다. 이 점은 구 위에 있고 AB 위에 있지 않다.

결과 · 다음 연결

따라서 $\mathrm{S}^2=16\times 58=928$이다.